Axiomatisation de $\mathbb{Z}$, de même puissance que Peano

Symbôles $0, S, +, \cdot$

Axiomes

I. S est une bijection

$\forall y \ \exists ! x \quad Sx = y$

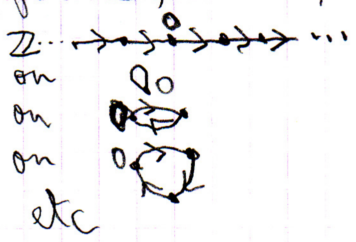
// Modèles restants : ensembles munis d'une bijection

II. Schéma d'induction (ou de limitation)

Pour toute formule $A(x)$:

$$[A(0) \wedge (\forall x \ A(x) \Rightarrow A(Sx)) \wedge \forall x y \underbrace{(A(x) \wedge Sy = x \Rightarrow A(y))}_{\text{// Transmission au précédent //}}] \Rightarrow \forall x \ A(x)$$

// Modèles standards restants : bijections formées d'un seul cycle :



Ds la théorie du second ordre où le schéma est vrai $\forall$ sous-ensemble A arbitraire et pas $\forall$ formule A du 1e ordre

III. Définition par induction de +

III a. base : $\forall x \quad x + 0 = x$

III b. transmission $\forall x y \quad x + Sy = S(x+y)$

rem : suffit pour transmettre dans les deux sens

// Modèles standards restants : ces mêmes cycles munis d'une seule addition possible $\Rightarrow \mathbb{Z}, +$ et tous les $\mathbb{Z}_n, +$

$n = 1, 2, 3, \ldots$