Axiomatisation de $\mathbb{Q}$ probablement de même force que Peano

Symboles : $0, 1, +, \cdot$

I. $\mathbb{Q}, +, \cdot$ est un champs :

- $\forall x\, y\, z \quad (x+y)+z = x+(y+z)$

$\forall x\, y \quad x+y = y+x$

$\forall x \quad x+0 = x$

$\forall x\, \exists y \quad x+y = 0$

$\forall x\, y\, z \quad x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$

$\forall x\, y \quad x\cdot y = y\cdot x$

$\forall x \quad x\cdot 1 = x$

$\forall x \quad x \neq 0 \Rightarrow \exists y \quad x\cdot y = 1$

$\forall x\, y\, z \quad x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

$1 \neq 0$

// Modèles restants : tous les champs.

II. Schéma de limitation : le plus petit champs contenu dans $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}$ tout entier

Pour toute formule $A(x)$:

$$\begin{pmatrix} A(0) \wedge A(1) \wedge (\forall x \forall y \; A(x) \wedge A(y) \Rightarrow A(x+y)) \\ \wedge \forall x \forall y \; (x+y=0 \wedge A(x) \Rightarrow A(y)) \\ \wedge \forall x \forall y \; (A(x) \wedge A(y) \Rightarrow A(x\cdot y)) \\ \wedge \forall x \forall y \; (x\cdot y = 1 \wedge A(x) \Rightarrow A(y)) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall x \; A(x)$$

// Modèle standard restant : $\mathbb{Q}, +, \cdot$ et les $\mathbb{Z}_{p}, +, \cdot$

↳ Pour A sous-ensemble arbitraire

p premier