Pour Bruno Marchal :

Voici une axiomatisation complete de Z, Z^*, Z_1, Z_1^*.

G : Axiomes :

- PL : A A tautologie
- K : $\Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B$ A, B formules
- Löb : $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ A formule

Règles

- MP : $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$ A, B formules

Néc : $\dfrac{A}{\Box A}$ A formule

· Travaillons dans G :

Def : $\boxed{Z} A \equiv \Box A \wedge \Diamond A$ $\qquad$ $\Diamond_Z A \equiv \neg \boxed{Z} \neg A$

Thm : a) G (et même K) $\vdash \boxed{Z} A \leftrightarrow \Box A \wedge \Diamond \top$

$\vdash \Diamond_Z A \leftrightarrow \Diamond A \vee \Box A$

$\vdash \Diamond_Z A \leftrightarrow \Diamond A \vee \Box \bot$

b) $\boxed{\text{G (et même K)} \vdash \Box A \leftrightarrow (\Diamond_Z \bot \vee \boxed{Z} A)}$

Cela signifie que l'on peut retrouver le necessaire de G : $\Box$, à partir de $\boxed{Z}$.

Il s'en suit une axiomatisation correcte et complète de Z, ainsi qu'une bi-interprétation réciproque entre Z et G :